COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Cachan et ULM

DURÉE : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Préambule.

On se donne une application $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe C^2 telle que $f(0) = 0$. On note $Df(0)$ la différentielle de f en 0 et A la matrice de $Df(0)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Le but de ce problème est d'étudier certaines propriétés de la suite $u(n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{R}^d$ définie par la relation de récurrence:

$$u(0) \text{ donné, } u(n+1) = f(u(n)) \text{ pour } n \geq 0.$$

Si x est un **réel**, $|x|$ désigne la valeur absolue de x.

Partie I

Etude d'un cas particulier ($d = 2$)

On se place sur $\mathbb{R}^2$ que l'on munit de la norme

$$|(x,y)| = max(|x|,|y|),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour tout $R > 0$, on note $B(0,R)$ la boule **fermée** de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^2$.

I.1. Pour $u \in \mathbb{R}^2$, on écrit $f(u) = Df(0)u + \mathcal{N}(u)$, où $\mathcal{N} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est tout simplement $f(u) - Df(0)u$. Montrer que $\mathcal{N}(u) = O(|u|^2)$ au voisinage de $u = 0$.

I.2. On suppose $detA \neq 0$. Montrer qu'il existe $R_0 > 0$ et un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tels que $f_{|\mathcal{U}}$ soit un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur la boule ouverte $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |(x,y)| < R_0\}$.
On note alors $f^{-1} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |(x,y)| < R_0\} \to \mathcal{U}$ l'application réciproque de $f_{|\mathcal{U}}$.
I.3. Pour tout $R \in]0, R_0[$, on pose

$$\mathcal{M}_s(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall n \geq 0,\ |f^n(x,y)| \leq R \text{ et } f^n(x,y) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\},$$

et

$$\mathcal{M}_i(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \exists (x(n),y(n))_{n\geq 0} \in (B(0,R) \cap \mathcal{U})^{\mathbb{N}} \text{ , vérifiant}$$
$$(x(n),y(n)) = f(x(n+1),y(n+1)),\ (x(0),y(0)) = (x,y)$$
$$\text{et } (x(n),y(n)) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\},$$

où f^n désigne la composée $fofo...of$ n fois et f^0 désigne l'identité. On note $f^{-n} = f^{-1}of^{-1}o...of^{-1}$ n fois, quand cela a un sens.
Montrer que pour $R \in]0, R_0[$, pour tout $(x,y) \in \mathcal{M}_i(R)$, pour tout $n \geq 1$, $f^{-n}(x,y)$ a un sens, que $f^{-n}(x,y) \in B(0,R)$ et que $(x(n),y(n)) = f^{-n}(x,y)$.

Dans toute la suite de cette partie on prend $f(x,y) = (\frac{1}{2}x + g(x,y), 2y + h(x,y))$, où g et h sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que $g(x,y) = O(|(x,y)|^2)$, $h(x,y) = O(|(x,y)|^2)$ au voisinage de $(x,y) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

I.4.a. Expliciter la matrice A.
I.4.b. Cas particulier: on suppose que les fonctions g et h sont identiquement nulles. Montrer que $\mathcal{M}_s(R)$ et $\mathcal{M}_i(R)$ sont définies pour tout $R > 0$ et les expliciter.
I.5. On revient au cas général: g et h non indentiquement nulles. Soit α un réel fixé tel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $R_1 \in]0, R_0[$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|(x,y)| \leq R_1$, $|(x',y')| \leq R_1$, on ait

$$|g(x',y') - g(x,y)| \leq \alpha|(x'-x, y'-y)| \text{ et } |h(x',y') - h(x,y)| \leq \alpha|(x'-x, y'-y)|.$$

I.6. On note c^0 l'ensemble de suites de $\mathbb{R}^2$ suivant:

$$c^0 = \{(\lambda(n),\mu(n))_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}};\ (\lambda(n),\mu(n)) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\}$$

qu'on munit de la norme

$$||(\lambda,\mu)||_\infty = \sup_{n\geq 0} |(\lambda(n),\mu(n))|.$$

Pour tout $R > 0$, on note $c^0(R)$ la boule **fermée** de centre 0 et de rayon R dans c^0 et on définit l'application χ_R sur $[-R,R] \times c^0(R)$ à valeurs dans c^0 par

$$\chi_R : \begin{array}{ccc} [-R,R] \times c^0(R) & \to & c^0 \\ (x,(\lambda,\mu)) & \mapsto & \chi_R(x,(\lambda,\mu)) \end{array}$$

avec pour $n \geq 1$

$$\chi_R(x,(\lambda,\mu))(n) = \left(\frac{1}{2}\lambda(n-1) + g(\lambda(n-1),\mu(n-1)),\ \frac{1}{2}[\mu(n+1) - h(\lambda(n),\mu(n))]\right)$$

et

$$\chi_R(x,(\lambda,\mu))(0) = \left(x,\ \frac{1}{2}[\mu(1) - h(\lambda(0),\mu(0))]\right).$$

I.6.a. Montrer que $\forall R \in]0, R_1]$, $\forall x \in [-R, R]$, $\forall (\lambda,\mu) \in c^0(R)$, on a $\chi_R(x,(\lambda,\mu)) \in c^0(R)$.
I.6.b. Montrer que $\forall R \in]0, R_1]$, $\forall x \in [-R, R]$, $\forall (\lambda,\mu) \in c^0(R)$, $\forall (\lambda',\mu') \in c^0(R)$, on a

$$||\chi_R(x,(\lambda,\mu)) - \chi_R(x,(\lambda',\mu'))||_\infty \leq (\frac{1}{2} + \alpha)||(\lambda,\mu) - (\lambda',\mu')||_\infty.$$

I.6.c. Montrer que $\forall R \in]0, R_1]$, $\forall (x,x') \in [-R, R]^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in c^0(R)$, on a

$$||\chi_R(x,(\lambda,\mu)) - \chi_R(x',(\lambda,\mu))||_\infty = |x - x'|.$$

I.7. Soit E un espace vectoriel normé complet pour une norme notée $N(.)$. Pour $R > 0$, on note $B_R = \{u \in E/\ N(u) \leq R\}$ (la boule **fermée** de centre 0 et de rayon R). On se donne une famille d'applications $(\varphi_s)_{s\in[a,b]}$ telles que pour tout $s \in [a,b]$, φ_s est définie sur B_R à valeurs dans B_R et $\exists t \in]0,1[$ tel que $\forall s \in [a,b]$, $\forall (u,v) \in B_R^2$

$$N(\varphi_s(u) - \varphi_s(v)) \leq tN(u - v)$$

et $\exists c > 0$ tel que $\forall s_1, s_2 \in [a,b]$, $\forall u \in B_R$,

$$N(\varphi_{s_1}(u) - \varphi_{s_2}(u)) \leq c|s_1 - s_2|.$$

Montrer que $\forall s \in [a,b]$, φ_s admet un unique point fixe dans B_R noté $u(s)$ et que l'application

$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \to & B_R \\ s & \mapsto & u(s) \end{array}$$

est lipschitzienne.
I.8.a. Déduire de I.6. et I.7. que pour tout $R \in]0, R_1]$, pour tout réel $x \in [-R, R]$, il existe un unique $(\lambda,\mu) \in c^0(R)$ tel que $\chi_R(x,(\lambda,\mu)) = (\lambda,\mu)$. On note (λ_x^R, μ_x^R) ce point fixe.
I.8.b. Montrer que pour tout $R \in]0, R_1]$, si $x \in [-R, R]$, alors $(\lambda_x^R, \mu_x^R) = (\lambda_x^{R_1}, \mu_x^{R_1})$.
Pour tout $x \in [-R_1, R_1]$, on note alors (λ_x, μ_x) l'élément $(\lambda_x^{R_1}, \mu_x^{R_1})$.
I.9. On pose $\psi(x) = \mu_x(0)$.
I.9.a. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} [-R_1, R_1] & \to & c^0 \\ x & \mapsto & (\lambda_x, \mu_x) \end{array}$$

est lipschitzienne. En déduire que ψ est lipschitzienne sur $[-R_1, R_1]$.
I.9.b. Soit $R \in]0, R_1]$ et $(x,y) \in \mathcal{M}_s(R)$. Montrer que $(f^n(x,y))_{n\geq 0} = (\lambda_x, \mu_x)$.
En déduire que $\forall R \in]0, R_1]$, $\mathcal{M}_s(R) \subset \{(x,\psi(x))/\ |x| \leq R\}$.
I.9.c. Soit $R \in]0, R_1]$ et $x \in [-R, R]$. Montrer que $(\lambda_x, \mu_x) = (f^n(x,\psi(x)))_{n\geq 0}$.
En déduire que

$$\mathcal{M}_s(R) = \{(x,\psi(x))/\ |x| \leq R\}.$$

I.9.d. On suppose que f est inversible sur $\mathbb{R}^2$ et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Enoncer et démontrer sans calcul un résultat sur $\mathcal{M}_i(R)$.

Partie II

Cas général ($d \geq 2$).

On se donne $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe C^2 et telle que $f(0) = 0$. On note toujours A la matrice de $Df(0)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres **complexes** de la matrice A et on suppose que

$$\sigma(A) \cap \{e^{i\theta} / \ \theta \in \mathbb{R}\} = \emptyset \text{ et } 0 \notin \sigma(A),$$

c'est-à-dire que A n'a pas de valeurs propres complexes de module 1 et que A est inversible.

II.1.a. Montrer que l'on a la décomposition suivante de $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{R}^d = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \text{Ker}\,(Df(0) - \lambda_i Id)^{\alpha_i} \bigoplus_{1 \leq j \leq m} \text{Ker}\left((Df(0))^2 + b_j Df(0) + c_j Id\right)^{\beta_j},$$

où p et m sont des entiers $p \geq 0$ et $m \geq 0$, les λ_i $(1 \leq i \leq p)$, b_j, c_j $(1 \leq j \leq m)$ sont des réels tels que $b_j^2 - 4c_j < 0$ pour $1 \leq j \leq m$ et les α_i, β_j sont des entiers supérieurs ou égaux à 1 $(1 \leq i \leq p)$, $(1 \leq j \leq m)$.

II.1.b. On note $D_+ = \{j /$ les racines complexes de $X^2 + b_j X + c_j$ sont de module strictement plus grand que $1\}$

et $D_- = \{j /$ les racines complexes de $X^2 + b_j X + c_j$ sont de module strictement plus petit que $1\}$ et on pose

$$E_+ = \bigoplus_{i \text{ tels que } |\lambda_i| > 1} \text{Ker}\,(Df(0) - \lambda_i Id)^{\alpha_i} \bigoplus_{j \in D_+} \text{Ker}\left((Df(0))^2 + b_j Df(0) + c_j Id\right)^{\beta_j},$$

et

$$E_- = \bigoplus_{i \text{ tels que } |\lambda_i| < 1} \text{Ker}\,(Df(0) - \lambda_i Id)^{\alpha_i} \bigoplus_{j \in D_-} \text{Ker}\left((Df(0))^2 + b_j Df(0) + c_j Id\right)^{\beta_j}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^d = E_+ \oplus E_-$.

II.1.c. On munit pour l'instant $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne canonique notée $||.||_2$. Montrer que E_+ et E_- sont stables par $Df(0)$ et qu'il existe deux constantes c et γ, $c > 0$, $0 < \gamma < 1$ telles que

$$\forall x \in E_-, \ \forall n \geq 0, \ ||(Df(0))^n x||_2 \leq c\gamma^n ||x||_2$$

et

$$\forall y \in E_+, \ \forall n \geq 0, \ ||(Df(0))^{-n} y||_2 \leq c\gamma^n ||y||_2.$$

II.1.d. Pour $x \in E_-$, on note $|x|_- = \sup\{\gamma^{-n} ||(Df(0))^n x||_2 / \ n \geq 0\}$ et pour $y \in E_+$, on note $|y|_+ = \sup\{\gamma^{-n} ||(Df(0))^{-n} y||_2 / \ n \geq 0\}$. On note P_+ (respectivement P_-) le projecteur dans $\mathbb{R}^d$ sur E_+ (respectivement E_-) parallèlement à E_- (respectivement E_+). Tout $u \in \mathbb{R}^d$ s'écrit de façon unique $u = x + y$, $x = P_- u$, $y = P_+ u$ et on pose

$$|u| = Max\{|P_- u|_-, |P_+ u|_+\}.$$

Montrer que $u \mapsto |u|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^d$ et que

$$\forall x \in E_-,\ \forall p \geq 0,\ |(Df(0))^p x|_- \leq \gamma^p |x|_-,$$

$$\forall y \in E_+,\ \forall p \geq 0,\ |(Df(0))^{-p} y|_+ \leq \gamma^p |y|_+.$$

Dans toute la suite du problème, on munit $\mathbb{R}^d$ de cette norme et on observera que $|x|_- = |x|$ pour $x \in E_-$ et $|y|_+ = |y|$ pour $y \in E_+$. On notera de plus, pour tout $R > 0$, $B(0,R)$ la boule **fermée** de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^d$ pour cette norme $u \mapsto |u|$. On pose

$$\mathcal{M}_s(R) = \{u \in \mathbb{R}^d / \ \forall n \geq 0,\ |f^n(u)| \leq R \text{ et } f^n(u) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\}.$$

II.2. Montrer qu'il existe une fonction $\mathcal{N} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $f(u) = Df(0)u + \mathcal{N}(u)$ et que $\mathcal{N}(u) = O(|u|^2)$ au voisinage de $u = 0$.
II.3. On pose $B_- = P_- Df(0)$, $B_+ = P_+ Df(0)$, $G_-(P_-u, P_+u) = P_-\mathcal{N}(u)$, $G_+(P_-u, P_+u) = P_+\mathcal{N}(u)$. On identifie $\mathbb{R}^d = E_- \oplus E_+$ à $E_- \times E_+$. Tout $u \in \mathbb{R}^d$ s'écrit donc de façon unique $u = (x,y)$, $x = P_-u \in E_-$, $y = P_+u \in E_+$. Montrer que

$$f(x,y) = (B_-x + G_-(x,y), B_+y + G_+(x,y)),\ \text{pour } (x,y) \in E_- \times E_+.$$

II.4. Montrer que la restriction de B_+ à E_+ définit un isomorphisme de E_+.
II.5. Soit $\alpha \in]0, 1-\gamma[$. Montrer qu'il existe $R_1 > 0$ tel que $\forall (x,y) \in E_- \times E_+$, $\forall\ (x',y') \in E_- \times E_+$ vérifiant $|(x,y)| \leq R_1$, $|(x',y')| \leq R_1$, on ait

$$|G_-(x',y') - G_-(x,y)| \leq \alpha |(x'-x, y'-y)| \text{ et } |G_+(x',y') - G_+(x,y)| \leq \alpha |(x'-x, y'-y)|.$$

II.6. On note c^0 l'ensemble de suites:

$$c^0 = \{(\lambda(n), \mu(n))_{n\geq 0} \in (E_- \times E_+)^{\mathbb{N}}\ ;\ (\lambda(n), \mu(n)) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\}$$

que l'on munit de la norme

$$||(\lambda, \mu)||_\infty = \sup_{n \geq 0} |(\lambda(n), \mu(n))|.$$

(On rappelle que $|(\lambda(n), \mu(n))| = \max(|\lambda(n)|_-, |\mu(n)|_+)$). Comme en I.6., pour chaque $R > 0$, on note $c^0(R)$ la boule **fermée** de centre 0 et de rayon R dans c^0 et on définit l'application χ_R sur $[E_- \cap B(0,R)] \times c^0(R)$ à valeurs dans c^0 par

$$\chi_R : \begin{array}{ccc} [E_- \cap B(0,R)] \times c^0(R) & \to & c^0 \\ (x, (\lambda, \mu)) & \mapsto & \chi_R(x, (\lambda, \mu)) \end{array}$$

où pour chaque $n \geq 1$, $\chi_R(x, (\lambda, \mu))(n)$ est égal à

$$\left(B_-\lambda(n-1) + G_-(\lambda(n-1), \mu(n-1)),\ B_+^{-1}[\mu(n+1) - G_+(\lambda(n), \mu(n))]\right)$$

et

$$\chi_R(x, (\lambda, \mu))(0) = \left(x,\ B_+^{-1}[\mu(1) - G_+(\lambda(0), \mu(0))]\right).$$

En s'inspirant de la partie I, montrer que pour tout $x \in E_- \cap B(0, R_1)$, il existe (λ_x, μ_x) élément de $c^0(R_1)$ tel que pour tout $R \in [|x|, R_1]$, (λ_x, μ_x) appartient à $c^0(R)$ et est l'unique solution de l'équation

$$\chi_R(x, (\lambda, \mu)) = (\lambda, \mu).$$

II.7. Pour $x \in E_- \cap B(0, R_1)$, on pose $\psi_-(x) = \mu_x(0)$. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} E_- \cap B(0, R_1) & \to & c^0 \\ x & \mapsto & (\lambda_x, \mu_x) \end{array}$$

est lipschitzienne. En déduire que ψ_- est définie sur $E_- \cap B(0, R_1)$ à valeurs dans $E_+ \cap B(0, R_1)$ et est lipschitzienne.

II.8. Montrer que pour tout $R \in]0, R_1]$,

$$\mathcal{M}_s(R) = \{(x, \psi_-(x))/\ |x| \leq R\}.$$

Partie III

Régularité.

On reste dans le cadre de la partie II. On veut montrer que ψ_- (définie en II.7.) est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour $x \in E_- \cap B(0, R_1)$ et $(\lambda, \mu) \in c^0(R_1)$ fixés, on note $D_2\chi(x, (\lambda, \mu))$ l'application linéaire de c^0 dans c^0 définie par:

$$D_2\chi(x, (\lambda, \mu)) : \begin{array}{ccc} c^0 & \to & c^0 \\ (\varepsilon^1, \varepsilon^2) & \mapsto & D_2\chi(x, (\lambda, \mu))(\varepsilon^1, \varepsilon^2) \end{array}$$

où pour chaque $n \geq 1$:

$$D_2\chi(x, (\lambda, \mu))(\varepsilon^1, \varepsilon^2)(n) = (X_1(n),\ X_2(n))$$

avec

$$X_1(n) = B_-\varepsilon^1(n-1) + DG_-(\lambda(n-1), \mu(n-1))(\varepsilon^1(n-1), \varepsilon^2(n-1)),$$

et

$$X_2(n) = B_+^{-1}\left[\varepsilon^2(n+1) - DG_+(\lambda(n), \mu(n))(\varepsilon^1(n), \varepsilon^2(n))\right],$$

et

$$D_2\chi(x, (\lambda, \mu))(\varepsilon^1, \varepsilon^2)(0) = \left(0,\ B_+^{-1}\left[\varepsilon^2(1) - DG_+(\lambda(0), \mu(0))(\varepsilon^1(0), \varepsilon^2(0))\right]\right)$$

où $DG_-(\lambda(n-1), \mu(n-1))$ [respectivement $DG_+(\lambda(n), \mu(n))$] désigne la différentielle de G_- [respectivement G_+] en $(\lambda(n-1), \mu(n-1))$ [respectivement en $(\lambda(n), \mu(n))$]; c'est une application linéaire de $E_- \times E_+$ dans E_- [respectivement de $E_- \times E_+$ dans E_+]. On munit l'ensemble des endomorphismes continus g de c^0 de la norme

$$|||g|||_\infty = \sup_{(\varepsilon^1, \varepsilon^2) \in c^0, (\varepsilon^1, \varepsilon^2) \neq 0} \frac{||g(\varepsilon^1, \varepsilon^2)||_\infty}{||(\varepsilon^1, \varepsilon^2)||_\infty},$$

où $||(\varepsilon^1, \varepsilon^2)||_\infty$ a été définie en II.6.

III.1. Montrer que $\forall x \in E_- \cap B(0, R_1)$, $\forall (\lambda, \mu) \in c^0(R_1)$, on a

$$|||D_2\chi(x,(\lambda,\mu))|||_\infty \leq (\gamma+\alpha) < 1.$$

(γ est introduit au II.1.c, et α au II.5.)

III.2. En déduire que $Id - D_2\chi(x,(\lambda,\mu))$ est une application linéaire inversible pour tout $x \in E_- \cap B(0,R_1)$ et pour tout $(\lambda,\mu) \in c^0(R_1)$.

(On pourra considérer la série $\sum_{k=0}^{+\infty}(D_2\chi(x,(\lambda,\mu)))^k$.)

III.3. Soit $D_1\chi(x,(\lambda,\mu))$ l'application linéaire de E_- dans c^0 définie par

$$D_1\chi(x,(\lambda,\mu)) : \begin{array}{ccc} E_- & \to & c^0 \\ h & \mapsto & D_1\chi(x,(\lambda,\mu))(h) \end{array}$$

où

$$D_1\chi(x,(\lambda,\mu))(h)(n) = (0,0), \text{ si } n \geq 1,$$

et

$$D_1\chi(x,(\lambda,\mu))(h)(0) = (h,0).$$

On note

$$A(x) = [Id - D_2\chi(x,(\lambda_x,\mu_x))]^{-1} D_1\chi(x,(\lambda_x,\mu_x)),$$

où (λ_x,μ_x) est introduit au II.6. On considère $\mathcal{L}(E_-,c^0)$ l'ensemble des applications linéaires continues g de E_- dans c^0 que l'on munit de la norme $|||g||| = \sup_{z\in E_-,\, z\neq 0} \frac{||g(z)||_\infty}{|z|}$.

Montrer que pour tout $x \in E_- \cap B(0,R_1)$, $A(x)$ est une application linéaire continue de E_- dans c^0 et que l'application

$$\begin{array}{ccc} E_- \cap B(0,R_1) & \to & \mathcal{L}(E_-,c^0) \\ x & \mapsto & A(x) \end{array}$$

est continue.

III.4. Montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall (x,h) \in E_-^2$, vérifiant $|x| < R_1$ et $|x+h| < R_1$, on ait

$$||(\lambda_{x+h},\mu_{x+h}) - (\lambda_x,\mu_x) - A(x)(h)||_\infty \leq C|h|^2.$$

(On utilisera le fait que l'application

$$\begin{array}{ccc} E_- \cap B(0,R_1) & \to & c^0 \\ x & \mapsto & (\lambda_x,\mu_x) \end{array}$$

est lipschitzienne.)

III.5. En déduire que ψ_- est de classe C^1 sur $\{x \in E_- / \ |x| < R_1\}$.

III.6. Calculer $Id - D_2\chi(0,(\lambda_0,\mu_0))$.

III.7. Montrer que $T = [Id - D_2\chi(0,(\lambda_0,\mu_0))]^{-1}$ est donnée par

$$T(\varepsilon^1,\varepsilon^2)(n) = (\sum_{k=0}^{n} B_-^{n-k}\varepsilon^1(k), \sum_{k=n}^{+\infty} B_+^{n-k}\varepsilon^2(k)), \text{ pour tout } n \geq 0.$$

III.8. En déduire $D\psi_-(0)$ et faire un dessin.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail